2Д

УДК 624.048-033.26:621.651

М.Б. Демчук
Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна
nbdemch@mail.ru

Про моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт

Представлено моделі числового розрахунку еволюції в часі та просторі фронту промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт. Першою метою даної роботи є демонстрація того, що криволінійна сітка, на якій виконується цей розрахунок, на деяких часових шарах може мати хаотичне розміщення вузлів у просторі. Іншою метою є перевірка того, що цей факт не призводить до неузгодженості результатів числових розрахунків згідно з представленими моделями.

Вступ

Перед будівництвом гребель та інших гідротехнічних споруд часто виникає необхідність у покращенні механічної міцності їх основ та у створенні протифільтраційних завіс. Цього можна досягти нагнітанням через інжектор у ґрунтовий масив в'яжучого розчину. Відомо два варіанти нагнітання: циркулярний та затискний. При циркулярному способі тиск нагнітання є постійним, а при затискному інфільтрат поступає в інжектор при постійній витраті.

Силікатні гелі, які раніше використовувались як інфільтрат, були хімічно-нестабільними і не задовольняли екологічним нормам. Тепер вони замінені цементними розчинами. Останні складаються з частинок. У випадку, коли їх розмір є достатньо малим для того, щоб рухатись у ґрунті, вони є відповідальними за явище, яке в літературі отримало назву глибинна фільтрація або фільтрація безодні. Розрізняють два механізми такої фільтрації. Згідно з [1] перший відповідає затисненню частинок у вузьких проходах між порами ґрунту, в той час як другий механізм відображає поступове утворення осаду з цих частинок на стінках пор та у проходах між порами, що має наслідком поступове зменшення розміру пор. У моделі нагнітання цементного розчину в насичене водою пористе середовище [2] використовується перший механізм для опису фільтрації безодні, а постановка задачі та значення вхідних параметрів відповідають умовам, наближеним до промислового використання цієї технології. Результати розрахунків згідно з останньою моделлю свідчать про те, що за цих умов, глибинна фільтрація не є домінуючим явищем.

У роботі [3] показано, що при виконанні умови

$$\sqrt{V \cdot t} >> \sqrt{8 \cdot a_L}\ , \qquad (1)$$

де тут і надалі V – швидкість частинок рідкої фази, а a_L – коефіцієнт повздовжньої дисперсії, описуючи нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт, можна знехтувати особливостями поширення розчину в пористому середовищі і моделювати даний процес задачею з вільною рухомою межею. Фільтрація у ґрунті цементного роз-

чину є прикладом повзучого руху [4]. При такому русі силами інерції можна знехтувати порівняно з силами тертя. Оскільки цементний розчин є структурованим і комбінація сил взаємодії між твердими частинками, між твердими частинками та частинками рідини робить його більш однорідним зі зростанням концентрації [5], то часткове заповнення ним пор ґрунту при його нагнітанні в сухий ґрунт можна моделювати як його розчинення в фіктивній невагомій рідині нульової в’язкості, яка насичувала ґрунт перед нагнітанням. Явище механічної дисперсії при нагнітанні цементного розчину в насичений рідиною ґрунт ($a_L V >> D^*$, де D^* – коефіцієнт дифузії) пояснюється тим, що швидкість частинок речовини в порі ґрунту плавно змінюється від нуля на поверхні до деякого максимального значення в деякій внутрішній точці пори і тим, що пори у ґрунті утворюють хаотичну систему з’єднаних між собою тунелів [6]. Якщо порівнювати при інших рівних умовах нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт з нагнітанням цементного розчину в сухий ґрунт, то в останньому випадку відношення кількості частинок цементу, які знаходяться одночасно в зоні переходу від ґрунту з максимальною концентрацією цементу в порах до ґрунту з нульовим значенням цієї концентрації і в контакті з поверхнею скелету ґрунту, до повної кількості частинок цементу, які знаходяться в зоні цього переходу, є більшим, ніж в першому випадку, і тому при моделюванні сухого ґрунту в останньому випадку ґрунтом, насиченим фіктивною невагомою рідиною нульової в’язкості, значення a_L є меншим, ніж відповідне значення в першому випадку [3]. Тому при перевірці виконання умови (1) для випадку нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт в її праву частину замість a_L можна підставляти значення для насиченого водою ґрунту. В роботі [3] показано, що при промисловому нагнітанні цементного розчину в сухий ґрунт умова (1) виконується. Моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт [3], [7], [8] формулюються у криволінійному чотирикутнику [9] із змінною в часі і наперед не відомою формою, і тому для їх розв’язання використовується різницевий метод з використанням числових конформних відображень [8], [10]. У цьому методі використовується алгоритм генерації на кожному часову шарі криволінійної сітки, яка покриває цей чотирикутник.

Першою метою даної роботи є демонстрація того, що на деяких часових шарах ця сітка може мати хаотичне розміщення вузлів у просторі. Іншою метою є перевірка того, що цей факт не призводить до неузгодженості результатів розрахунків згідно з моделями [3], [7], [8].

Моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт

У роботах [3], [7], [8] ми розглядаємо чотири постановки задачі. Для постановки № 1 [7] та постановки № 3 [3], [8] вважаємо, що під фундаментом інжектора зроблено довгу траншею ширини $2 \cdot r_0$ та глибини h_0, в яку при постійному п’єзометричному напорі H_0 нагнітається (рис. 1) в’яжучий інфільтрат, який є нестисливою ньютонівською рідиною. У постановках № 2 [7] та № 4 [3], [8] замість траншеї маємо свердловину радіуса r_0 та глибини h_0. У всіх цих задачах необхідно знайти еволюцію в часі та просторі фронту нагнітання. У перших двох постановках скелет ґрунту вважається абсолютно твердим, а у третій та четвертій постановках він є пружним.

Ми припускаємо (гіпотеза №1), що при протяжностях процесу та при тисках в інжекторі, які відповідають промисловому використанню цієї технології, початкова

форма рухомої межі Γ_4 (рис. 1) не впливає на її кінцеву форму, якщо перша несуттєво відрізняється від форми інжектора і що у випадках третьої та четвертої постановок початкове значення функції напору можна вибрати довільним. Таким чином початкове положення рухомої межі Γ_4 вибираємо так, щоб воно несуттєво відрізнялось від Γ_3.

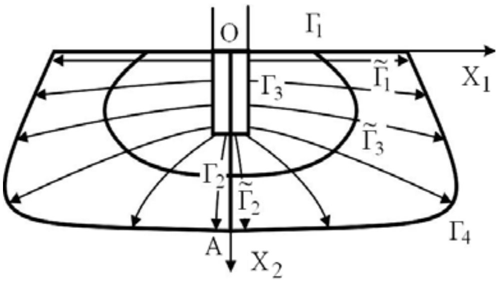


Рисунок 1 – Криволінійні чотирикутники $G(t)$ та $\tilde{G}(t)$

Вважаючи фронт нагнітання інфільтрату у ґрунт, насичений фіктивною невагомою рідиною нульової в'язкості, лінією розриву параметрів фільтраційного потоку, легко отримати закон за яким рухаються точки фронту нагнітання [7]

$$\vec{r}(t+\tau)\big|_{\Gamma_4} = \vec{r}(t)\big|_{\Gamma_4} - k\left(\vec{\nabla} h\big|_{\Gamma_4}, \vec{n}_4\right)\Big/ m\cdot\tau\cdot\vec{n}_4\,, \tag{2}$$

де $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор точки фронту нагнітання в момент часу t, k – коефіцієнт фільтрації, m – пористість ґрунту, τ – крок по часу, $\vec{n}_4$ – зовнішня відносно до області закріплення нормаль до Γ_4 в момент часу t в точці з радіус-вектором $\vec{r}(t)$.

У випадку задачі, яка відповідає постановці № 1, в це рівняння замість $h(x_1, x_2, t)$ потрібно підставляти розв'язок крайової задачі [7], яка формулюється у криволінійному чотирикутнику $G(t)$, який на рис. 1 обмежений кривими Γ_1, Γ_2, Γ_3 та Γ_4. Для знаходження розв'язку цієї крайової задачі застосовуємо різницевий метод із використанням числових конформних відображень. Цей метод пропонує алгоритм знаходження в кожний момент часу $t = t_1 \geq 0$ такої заміни змінних $x_1 = x_1(\xi,\eta,t_1)$, $x_2 = x_2(\xi,\eta,t_1)$, яка конформно відображає область $G(t_1)$ на параметричний прямокутник $G'(t_1)$ зі сторонами $1/M(t_1)$ та 1, де $M(t_1)$ – модуль прямокутника (рис. 2 а). Крім того, до розв'язання вищезгаданої крайової задачі в момент часу $t = t_1 \geq 0$ застосовуємо метод становлення, тобто розглядаємо таку початково-крайову задачу

$$\partial u/\partial\tilde{t} = \Delta u\left(\xi,\eta,t_1,\tilde{t}\right) = \partial^2 u/\partial\xi^2 + \partial^2 u/\partial\eta^2\,, \tag{3}$$

$$u\big|_{\Gamma_3'} = H_0,\ u\big|_{\Gamma_4'} = -x_2(1/M,\eta,t_1),\ \partial u/\partial\eta\big|_{\Gamma_1'} = 0,\ \partial u/\partial\eta\big|_{\Gamma_2'} = 0,\ u(\xi,\eta,t_1,0) = \varphi(\xi,\eta,t_1), \tag{4}$$

де φ – довільна функція змінних ξ, η та t_1, Γ_1', Γ_2', Γ_3' та Γ_4' є образами відповідно Γ_1, Γ_2, Γ_3 та Γ_4 при вищезгаданому конформному відображенні. Розв'язок задачі (3), (4) володіє тією властивістю, що $u(\xi,\eta,t_1,\tilde{t}) \to \tilde{h}(\xi,\eta,t_1)$ при $\tilde{t} \to +\infty$, де $\tilde{h}(\xi,\eta,t_1) = h\left(x_1(\xi,\eta,t_1), x_2(\xi,\eta,t_1), t_1\right)$, а $h(x_1, x_2, t_1)$ – шукана функція. Знайшовши таким чином $h(x_1, x_2, t_1)$, де $(x_1, x_2) \in G(t_1)$, згідно зі співвідношенням (2) знаходимо положення фронту нагнітання Γ_4 на момент часу $t_1 + \tau$, після чого аналогічно знаходимо $h(x_1, x_2, t_1 + \tau)$ при $(x_1, x_2) \in G(t_1 + \tau)$, і так діємо до кінцевого моменту часу.

Математична модель задачі, яка відповідає постановці № 2, отримується з вищеописаної моделі заміною рівняння (3) на таке рівняння

$$\partial u/\partial\tilde{t} = \partial^2 u/\partial\xi^2 + (\partial x_2/\partial\eta\cdot\partial u/\partial\xi - \partial x_2/\partial\xi\cdot\partial u/\partial\eta)/x_1(\xi,\eta,t) + \partial^2 u/\partial\eta^2 . \quad (5)$$

У випадку задачі, яка відповідає постановці № 3, в рівняння (2) замість $h(x_1, x_2, t)$ потрібно підставляти розв'язок крайової задачі [8], яка формулюється у криволінійному чотирикутнику $G(t)$. Для знаходження розв'язку цієї крайової задачі так само, як в попередніх двох моделях, застосовуємо різницевий метод з використанням числових конформних відображень. Однак в цьому випадку більш зручним є нерухомий квадрат Q із стороною, рівною 1 (рис. 2 б). До нього від вищезгаданого прямокутника $G'(t)$ можна перейти за допомогою відображення $\xi = \bar{\xi}/M(\bar{t})$, $\eta = \bar{\eta}$, $t = \bar{t}$. У роботі [3] показано, що знаходження функції $h(x_1, x_2, t_1)$ при $(x_1, x_2)\in G(t_1)$ та $t_1 \ge \tau > 0$ зводиться до розв'язання таких двох одновимірних крайових задач

$$\partial u/\partial\bar{t} = K_2(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau)\cdot\partial^2 u/\partial\bar{\eta}^2 + K_4(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau)\cdot\partial u/\partial\bar{\eta},\ 0<\bar{\xi},\bar{\eta}<1, \quad (6)$$

$$u(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau) = \tilde{h}(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau),\ \partial u/\partial\bar{\eta}(\bar{\xi},0,\bar{t}) = 0,\ \partial u/\partial\bar{\eta}(\bar{\xi},1,\bar{t}) = 0, \quad (7)$$

$$\partial w/\partial\bar{t} = K_1(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau)\cdot\partial^2 w/\partial\bar{\xi}^2 + K_3(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau)\cdot\partial w/\partial\bar{\xi},\ 0<\bar{\xi},\ \bar{\eta}<1, \quad (8)$$

$$w(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau) = u(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1),\ \ w(0,\bar{\eta},\bar{t}) = H_0,\ w(1,\bar{\eta},\bar{t}) = -x_2(1,\bar{\eta},\bar{t}). \quad (9)$$

Явні вигляди функцій $K_i(\bar{\xi},\bar{\eta},t_1-\tau)$, де $i=\overline{1,4}$, наведені в роботі [3]. У рівняннях (6) – (9) $t_1-\tau \le \bar{t} \le t_1$, а в рівняннях (7), (9) $0\le\bar{\xi},\bar{\eta}\le 1$. У роботі [3] доведено таку теорему.

Теорема 1. Нехай існують такі функції $u(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t})$ та $w(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t})$ та існує таке $\delta>0$, що ці функції є двічі неперервно-диференційованими на множині $\Omega_\delta = (-\delta,1+\delta)\times(-\delta,1+\delta)$ $\times(t_1-\delta-\tau,t_1+\delta)$ і є розв'язками задач (6), (7) та (8), (9) відповідно. Нехай існує така функція $\tilde{h}(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t})$, яка є двічі неперервно-диференційованою на тій самій множині і яка є такою, що $\tilde{h}(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t}) = h(x_1(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t}), x_2(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t}),\bar{t})$ при $(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t})\in\Omega_\delta$, де $h(x_1,x_2,t)$ – шукана функція. Нехай, крім того, у кожному випадку функції $K_i(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{t})$, де $i=\overline{1,4}$, є неперервними на Ω_δ. Тоді можна стверджувати, що виконується наступне: $w=\tilde{h}+\mathrm{O}(\tau^2)$, при $\bar{t}=t_1$ та $0<\bar{\xi},\ \bar{\eta}<1$, $w=\tilde{h}$ при $\bar{t}=t_1$, $\bar{\xi}=0$, $0\le\bar{\eta}\le 1$ та $\bar{\xi}=1$, $0\le\bar{\eta}\le 1$, $\partial w/\partial\bar{\eta} = \mathrm{O}(\tau^2)$ при $\bar{t}=t_1$, $\bar{\eta}=0$, $0\le\bar{\xi}\le 1$ та $\bar{\eta}=1$, $0\le\bar{\xi}\le 1$.

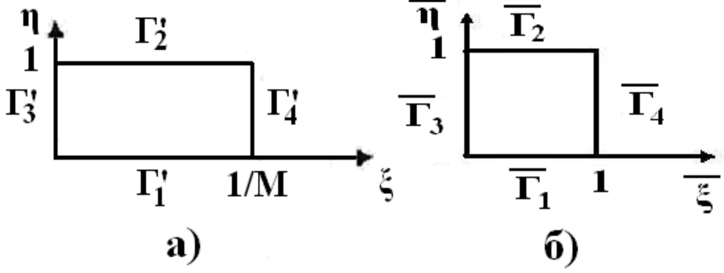


Рисунок 2 – Параметричний прямокутник $G'(t)$ та одиничний квадрат Q

Знайшовши таким чином $h(x_1, x_2, t_1)$, де $(x_1, x_2) \in G(t_1)$, згідно зі співвідношенням (2) знаходимо положення фронту нагнітання Γ_4 на момент часу $t_1 + \tau$, після чого аналогічно знаходимо $h(x_1, x_2, t_1 + \tau)$ при $(x_1, x_2) \in G(t_1 + \tau)$, і так діємо до кінцевого моменту часу.

Математична модель задачі, яка відповідає постановці № 4, відрізняється від попередньої моделі тільки видом функцій $K_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{t})$, де $i = \overline{3,4}$, явний вигляд яких представлений в роботі [3].

У кожній із сформульованих вище моделей при розрахунку еволюції фронту нагнітання на кожному часовому шарі $(t = t_1 \geq 0)$ область закріплення $G(t_1)$ покривається рідкою криволінійною сіткою, наслідком чого є те, що похибка апроксимації є суттєвою. У кожній з цих моделей також робляться такі припущення. По-перше, ми припускаємо (гіпотеза № 2), що при $h_0 >> r_0$ в межах цієї похибки фронт нагнітання можна описувати двічі неперервно-диференційованою функцією змінної x_2 (рис. 1). По-друге, ми припускаємо (гіпотеза № 3), що в межах цієї похибки у криволінійного чотирикутника $G(t_1)$, сторонами якого є криві Γ_i, де $i = \overline{1,4}$, всі кути при вершинах є прямими. По-третє, внаслідок того, що кількість вузлів є незначною, ми припускаємо (гіпотеза №4), що хаотичність на деяких часових шарах розміщення у просторі вузлів сітки не є причиною суттєвого спотворення кінцевого положення фронту нагнітання. У роботі [3] коректність гіпотез № 2 – № 4 перевірено для постановок № 3 та № 4 наступним числовим експериментом. Оскільки інформація про те, що фронт нагнітання змінює своє положення, поширюється за допомогою звукових хвиль, які внаслідок тертя між ґрунтом та інфільтратом швидко затухають, то можна вибрати криву в межах закріпленої області і момент часу t_0, починаючи з якого значення функції напору в точках цієї кривої не залежать від часу. Тому можна модифікувати моделі для третьої та четвертої постановок, представлені в роботі [8], використовуючи припущення про те, що в кожному випадку функція напору залежить від часу тільки в області $\tilde{G}(t)$, яка на рис. 1 обмежена кривими $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$, $\tilde{\Gamma}_3$, Γ_4. І тому, починаючи з деякого моменту часу t_0, у рівняння (2) замість функції напору підставляємо функцію, яка при $t_1 \geq t_0 + \tau$ в кожному випадку є розв'язком крайової задачі [3], яка формулюється у криволінійному чотирикутнику $\tilde{G}(t_1)$. При $t_1 \geq t_0 + \tau$ модифіковані моделі отримуються з відповідних не модифікованих заміною відображення одиничного квадрата Q на криволінійний чотирикутник $G(t_1)$ на відображення цього квадрата на криволінійний чотирикутник $\tilde{G}(t_1)$ та заміною другої з умов (9) на умову $w(0, \bar{\eta}, \bar{t}) = \tilde{h}(0, \bar{\eta}, t_0)$, де $\tilde{h}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0) = h\left(x_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0), \left(x_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0\right), t_0\right)$, $h(x_1, x_2, t_0)$ – функція напору, отримана в рамках відповідної не модифікованої моделі, а $x_1 = x_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0)$, $x_2 = x_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t_0)$ – вищезгадане відображення, яке відображає одиничний квадрат Q на криволінійний чотирикутник $\tilde{G}(t_0)$. В обох цих модифікованих моделях положення $\tilde{\Gamma}_3$ та момент часу t_0 підбираються експериментально так, щоб кінцеве положення фронту нагнітання відрізнялось від кінцевого положення, отриманого в рамках відповідної моделі з роботи [8], на як можна меншу величину і щоб похибка апроксимації розрахунку цього положення в рамках відповідної модифікованої

моделі була як можна меншою. При цьому виявилось [3], що як для постановки № 3, так і для постановки № 4 похибка чисельного розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання в рамках модифікованої моделі є меншою, ніж в рамках відповідної моделі з роботи [8]. Цей факт підтверджує коректність гіпотез № 2 – № 4 для моделей, які відповідають постановкам № 3 та № 4.

Вектор нормалі $\vec{n}_4$ до кривої Γ_4, який присутній у співвідношенні (2), обчислюється так само, як в роботі [8]. Для знаходження числових розв'язків задач (3), (4) та (5), (4) використовуємо явні різницеві схеми, представлені в роботі [7], а для числового розв'язання пари крайових задач (6) – (9) використовуємо різницеву схему, представлену в роботі [8].

Алгоритм числового відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник

Застосовуючи різницевий метод з використанням числових конформних відображень до розв'язання крайової задачі для диференційного рівняння в часткових похідних, сформульованої у криволінійному чотирикутнику $G^*(t)$ зі сторонами $\Gamma_i^*(t)$, де $i=\overline{1,4}$, а t – час, роблять заміну змінних

$$x_1 = x_1(\xi,\eta,\tilde{t}), \qquad x_2 = x_2(\xi,\eta,\tilde{t}), \qquad t = \tilde{t}, \tag{10}$$

яка в кожний момент часу $\tilde{t}$ конформно відображає параметричний прямокутник $G'(\tilde{t})$ (рис. 2 а) на криволінійний чотирикутник $G^*(\tilde{t})$ (рис. 3). Якщо прийняти (рис. 2 а), що довжина вертикальної сторони $G'(\tilde{t})$ рівна 1, а довжина його горизонтальної сторони рівна $1/M(\tilde{t})$, де $M(\tilde{t})$ – модуль $G^*(\tilde{t})$, який є інваріантом конформного відображення [9], то при знаходженні заміни змінних (10) зручно зробити заміну змінних

$$\xi = \bar{\xi}/M(\bar{t}), \qquad \eta = \bar{\eta}, \qquad \tilde{t} = \bar{t}, \tag{11}$$

яка в кожний момент часу $\bar{t}$ відображає одиничний квадрат Q (рис. 2 б) на параметричний прямокутник $G'(\bar{t})$. Функції $x_1(\xi,\eta,\tilde{t})$, $x_2(\xi,\eta,\tilde{t})$, записані в нових змінних, шукаються як розв'язок такої задачі

$$M^2\,\partial^2 x_1/\partial\bar{\xi}^2 + \partial^2 x_1/\partial\bar{\eta}^2 = 0, \qquad M^2\,\partial^2 x_2/\partial\bar{\xi}^2 + \partial x_2/\partial\bar{\eta}^2 = 0, \tag{12}$$

$$\Phi_i\left(x_1\left(\bar{\xi}/M(\bar{t}),\bar{\eta},\bar{t}\right), x_2\left(\bar{\xi}/M(\bar{t}),\bar{\eta},\bar{t}\right),\bar{t}\right) = 0, \tag{13}$$

$$M\,\partial x_1/\partial\bar{\xi} = \partial x_2/\partial\bar{\eta} \qquad \text{або} \qquad \partial x_1/\partial\bar{\eta} = -M\,\partial x_2/\partial\bar{\xi}\,. \tag{14}$$

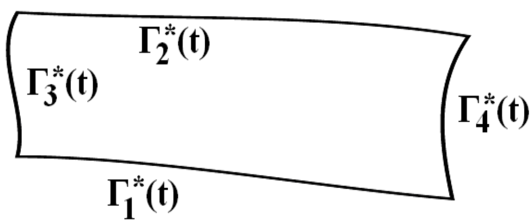


Рисунок 3 – Криволінійний чотирикутник $G^*(t)$

У рівняннях (12) – (14)

$$M = \iint\limits_{Q} \left((\partial x_1/\partial \overline{\eta})^2 + (\partial x_2/\partial \overline{\eta})^2 \right) / J \, d\overline{\xi} d\overline{\eta} \Big/ \iint\limits_{Q} \left((\partial x_1/\partial \overline{\xi})^2 + (\partial x_2/\partial \overline{\xi})^2 \right) / J \, d\overline{\xi} d\overline{\eta} \, , \quad (15)$$

де $J = \partial x_1/\partial \overline{\xi} \cdot \partial x_2/\partial \overline{\eta} - \partial x_1/\partial \overline{\eta} \cdot \partial x_2/\partial \overline{\xi}$. У рівняннях (13), (14) $(\overline{\xi},\ \overline{\eta}) \in \overline{\Gamma}_i$, а $\overline{\Gamma}_i$ є прообразом $\Gamma_i^*(t)$, де $i = \overline{1,4}$, при суперпозиції відображень (11), (10). У рівнянні (13) Φ_i, де $i = \overline{1,4}$, є таким, що $\Phi_i(x_1, x_2, t) = 0$ є рівнянням сторони $\Gamma_i^*(t)$ криволінійного чотирикутника $G^*(t)$ в момент часу t.

У роботі [10] представлено алгоритм знаходження числового розв'язку дискретизації задачі (12) – (14). Але в загальному випадку система рівнянь, яка є дискретним аналогом рівнянь (12) – (14) і в якій кількість рівнянь рівна кількості невідомих, має необмежену кількість розв'язків. Дійсно, якщо ми покриємо одиничний квадрат рівномірною сіткою 3×3, то одна з можливих дискретизацій рівнянь (12), першого з рівнянь (14) при $(\overline{\xi},\ \overline{\eta}) \in \overline{\Gamma}_i$, де $i = 1{,}2$ та другого з рівнянь (14) при $(\overline{\xi},\ \overline{\eta}) \in \overline{\Gamma}_i$, де $i = 3{,}4$, є такою

$$4 \cdot M^2 \left(x_{1,0,1} - 2x_{1,1,1} + x_{1,2,1} \right) + 4 \cdot \left(x_{1,1,0} - 2x_{1,1,1} + x_{1,1,2} \right) = 0 \, , \quad (16)$$

$$4 \cdot M^2 \left(x_{2,0,1} - 2x_{2,1,1} + x_{2,2,1} \right) + 4 \cdot \left(x_{2,1,0} - 2x_{2,1,1} + x_{2,1,2} \right) = 0 \, , \quad (17)$$

$$-M\left(x_{1,2,0} - x_{1,0,0} \right) = 3x_{2,1,0} - 4x_{2,1,1} + x_{2,1,2} \, , \; M\left(x_{1,2,2} - x_{1,0,2} \right) = 3x_{2,1,2} - 4x_{2,1,1} + x_{2,1,0} \, , \quad (18)$$

$$x_{1,0,2} - x_{1,0,0} = M\left(3x_{2,0,1} - 4x_{2,1,1} + x_{2,2,1} \right), \; -x_{1,2,2} + x_{1,2,0} = M\left(3x_{2,2,1} - 4x_{2,1,1} + x_{2,0,1} \right). \quad (19)$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. Система рівнянь (17) – (19) є лінійно залежною. *Доведення.* Якщо праву і ліву частини кожного з рівнянь (19) помножити на M, і потім до суми цих рівнянь додати рівняння (18), то отримається рівняння (17). Теорему доведено. Таким чином в результаті виконання вищезгаданого алгоритму [10] можна отримати зайвий розв'язок, який не відповідає конформному відображенню. Його ознакою може бути хаотичне розміщення вузлів криволінійної сітки.

Результати числових експериментів

У даній роботі ми розрізняємо два типи вхідних параметрів. До першого типу відносимо ті вхідні параметри, які визначаються методом обчислення, а до параметрів другого типу відносимо решту вхідних параметрів. Значення параметрів обох типів для першої та другої постановок взяті з роботи [7], а для третьої та четвертої з роботи [3]. При цьому значення параметрів другого типу для випадку першої постановки є такими самими, як для випадку третьої постановки. У свою чергу, значення параметрів другого типу для випадку другої постановки є такими самими, як для випадку четвертої. Для всіх постановок значення параметрів другого типу відповідають режиму промислового використання даної технології. У роботі [3] кінцеві положення фронтів нагнітання для найбільш твердого ґрунту та найбільш м'якого ґрунту розраховані методом [8] у випадках третьої постановки відповідно з похибками $\varepsilon_{1,3} = 5{,}3\,\%$ та $\widetilde{\varepsilon}_{1,3} = 5{,}0\,\%$, при цьому міра різниці [3] між ними є такою $\delta_{1,3} = 1{,}2\,\%$, а у випадку четвертої постановки відповідно з похибками $\varepsilon_{1,4} = 7{,}3\,\%$ та $\widetilde{\varepsilon}_{1,4} = 7{,}0\,\%$, при цьому міра різниці між ними є такою $\delta_{1,4} = 2{,}0\,\%$. У свою чергу, кінцеві положення фронтів нагнітання для найбільш

твердого ґрунту та найбільш м'якого ґрунту розраховані модифікованим методом [3] у випадках третьої постановки відповідно з похибками $\varepsilon_{2,3} = 3{,}7\,\%$ та $\tilde{\varepsilon}_{2,3} = 3{,}6\,\%$, при цьому міра різниці [3] між ними є такою $\delta_{2,3} = 1{,}5\,\%$, а у випадку четвертої постановки відповідно з похибками $\varepsilon_{2,4} = 4{,}6\,\%$ та $\tilde{\varepsilon}_{2,4} = 4{,}2\,\%$, при цьому міра різниці між ними є такою $\delta_{2,4} = 2{,}2\,\%$. Оскільки $\delta_{i,j} < \varepsilon_{i,j} + \tilde{\varepsilon}_{i,j}$, де $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{3,4}$, то розрахунки для пружного скелету ґрунту можна порівнювати з розрахунками для абсолютно твердого скелету ґрунту [11].

У роботі [7] кінцеве положення фронту нагнітання для абсолютно твердого скелету ґрунту розраховане у випадку першої постановки з похибкою $\varepsilon_1 = 2{,}5\,\%$, а у випадку другої – з похибкою $\varepsilon_2 = 5{,}3\,\%$. Міри різниці між кінцевим положенням фронту нагнітання в абсолютно твердий скелет ґрунту, отриманим в рамках першої постановки, та кінцевими положеннями, отриманими в рамках третьої постановки методом [8] при найбільш твердому ґрунті, при найбільш м'якому ґрунті, модифікованим методом [3] при найбільш твердому ґрунті, при найбільш м'якому ґрунті, відповідно є такими $w_{1,3} = 3{,}9\,\%$, $\tilde{w}_{1,3} = 3{,}5\,\%$, $w_{2,3} = 6{,}1\,\%$, $\tilde{w}_{2,3} = 5{,}1\,\%$. Міри різниці між кінцевим положенням фронту нагнітання в абсолютно твердий скелет ґрунту, отриманим в рамках другої постановки та кінцевими положеннями, отриманими в рамках четвертої постановки методом [8] при найбільш твердому ґрунті, при найбільш м'якому ґрунті, модифікованим методом [3] при найбільш твердому ґрунті, при найбільш м'якому ґрунті, відповідно є такими $w_{1,4} = 12{,}1\,\%$, $\tilde{w}_{1,4} = 11{,}6\,\%$, $w_{2,4} = 12{,}6\,\%$, $\tilde{w}_{2,4} = 10{,}5\,\%$. Той факт, що $w_{i,j}$ та $\tilde{w}_{i,j}$ не є суттєво більшими, ніж відповідно $\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{j-2}$ та $\tilde{\varepsilon}_{i,j} + \varepsilon_{j-2}$, де $i = \overline{1,2}$, а $j = \overline{3,4}$, підтверджує коректність гіпотез № 2 – № 4 для всіх представлених у даній роботі моделей [11]. Коректність гіпотези № 1 для моделей, які відповідають першим двом постановкам та останнім двом, перевірено відповідно в роботах [7] та [3].

Висновок

У представлених моделях на кожному часовому шарі просторові координати вузлів криволінійної сітки, на якій виконується розрахунок еволюції в часі та просторі фронту нагнітання, знаходяться з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. У даній роботі вперше показано, що ця система в загальному випадку має необмежену кількість розв'язків. У даній роботі також вперше чисельно перевірено коректність гіпотез № 2 – № 4 для тих представлених моделей, в яких скелет ґрунту є абсолютно твердим.

У моделях [3], [7], [8] у будь-який момент часу фронт нагнітання інтерполювався одним і тим самим двічі неперервно-диференційованим локальним сплайном. Вплив невизначеності у способі інтерполяції фронту нагнітання на похибки розрахунків згідно них буде досліджуватись. Крім того, результати цих розрахунків будуть порівнюватись з результатами польових досліджень для того, щоб обґрунтувати нехтування фільтрацією безодні при моделюванні промислового нагнітання у ґрунт цементного розчину.

Література

1. Sharma M.M. Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation / M.M. Sharma, Y.C. Yortsos // American Institute of Chemical Engineers Journal. – 1987. – Vol. 33. – P. 1636-1643.
2. Chupin O. Modeling of a semi-real injection test in sand / Chupin O., Saiyouri N., Hicher P.-Y. // Computers and Geotechnics. – 2009. – Vol. 36. – P. 1039-1042.

3. Демчук М.Б. Математичне моделювання процесу нагнітання в'яжучого розчину в пористе середовище / М.Б. Демчук // Математичне та комп'ютерне моделювання : зб. наук. пр. – 2010. – Вип. 4. – С. 61-75. – (Сер. фіз.-мат. науки).
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Прандтль Л. – М. : Изд-во иностр. лит., 1951.– 575 с.
5. Legrand C. La Structure des Suspensions de Ciment / C. Legrand // Le Béton Hydraulique. – Paris : Presses de I'ENPC, 1982.
6. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990. – 553 p.
7. Vlasyuk A.P. Numerical solution of a problem of giving waterside structure foundation strength / A.P. Vlasyuk, M.B. Demchuk // Scientific Bulletin of Chelm. Section of mathematics and computer science. – 2007. – № 1. – P. 211-222.
8. Власюк А.П. Застосування числових конформних відображень до розв'язання крайової задачі з рухомою межею для рівняння параболічного типу в криволінійному чотирикутнику / А.П. Власюк, М.Б. Демчук, М.М. Обезюк // Вісн. Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2007. – Вип. 4 (40), ч. 3. – С. 268-286.
9. Годунов С.К. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С.К Годунов., Г.П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 5. – С. 1031-1059.
10. Власюк А.П. Чисельне розв'язування одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – К., 1994. – 23 с. – (Препр. / НАН України, Ін-т математики; 94.36).
11. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Тейлор Дж. – Москва : Мир, 1985. – 272 с.

Literatura

1. Sharma M.M. American Institute of Chemical Engineers Journal. 1987. Vol. 33. P. 1636-1643.
2. Chupin O. Computers and Geotechnics. 2009. Vol. 36. P. 1039-1042.
3. Demchuk M.B. Matematychne ta komp'juterne modeljuvannja: zb. nauk. pr. Ser. fiz.-mat. nauky. 2010. № 4. P. 61-75.
4. Prandtl' L. Moscow : Izdatel'stvo inostrannoj literatury.1951. 575 p.
5. Legrand C. Le Béton Hydraulique. Paris: Presses de I'ENPC. 1982.
6. Bear J. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1990. 553 p.
7. Vlasyuk A.P. Scientific Bulletin of Chelm. Section of mathematics and computer science. 2007. № 1. P. 211-222.
8. Vlasjuk A. P.Visnyk Nacional'nogo universytetu vodnogo gospodarstva ta pryrodokorysituvannja. 2007. № 4 (40). Part 3. P. 268-286.
9. Godunov S.K. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 1967. Vol. 7. № 5. P. 1031-1059.
10. Vlasjuk A. P. Kiev : NAS of Ukraine: Instytut matematiki; 94.36. 1994. 23 p.
11. Tejlor Dzh. Moscow : Mir. 1985. 272 p.

Н.Б. Демчук

О моделях промышленного циркулярного нагнетания цементного раствора в сухой грунт

Представлены модели численного расчёта эволюции во времени и пространстве фронта промышленного циркулярного нагнетания цементного раствора в сухой грунт. Первой целью данной работы есть демонстрация того, что криволинейная сетка, на которой выполняется этот расчёт, на некоторых временных слоях может иметь хаотическое расположение узлов в пространстве. Другой целью есть проверка того, что этот факт не приводит к противоречивости результатов расчётов согласно представленных моделей.

M.B. Demchuk

About Real Scale Models of a Cement Grout Interjection at a Constant Pressure in a Dry Soil

Models of a numerical calculation of a time and space evolution of a front of a real scale injection of a cement grout in a dry soil are presented. The first aim of this work is to show that a curvilinear grid this calculation is performed on can have chaotic disposition of its points in space on some time layers. Another aim is to check that this fact does not result in conflict among results of calculations according to presented models.

Стаття надійшла до редакції 24.02.2011.